UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

THIAGO AUGUSTO MOREIRA

UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DOS JOGOS

Sorocaba
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DOS JOGOS

THIAGO AUGUSTO MOREIRA
Prof. Orientador: Dr. Wladimir Seixas

Sorocaba
2017

UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DOS JOGOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de São Carlos (campus Sorocaba), para aprovação no Curso de Graduação de Licenciatura em Matemática.

Sorocaba

2017

Dedico este trabalho à Deus que sempre me mostrou a verdade e o que é certo, meu guia nas mais diversas situações em minha vida

Também aos meus pais Antonio e Isabel que sempre se esforçaram para que eu tivesse a melhor educação possível, por serem os conselheiros de que eu precisei e por terem me criado com amor e carinho.

À minha noiva Heloiza que hoje é meu porto seguro, nela me inspiro e busco ser uma pessoa melhor, companheira para todas as horas.

AGRADECIMENTOS

À Deus por me proporcionar a capacidade de concluir esta etapa em minha vida.

Aos meus pais pelos cansáveis esforços em busca de uma educação melhor para mim.

A minha noiva pela compreensão, força, estimulo e por nunca deixar de acreditar em mim.

À todos os professores que estiveram presentes em minha vida e colaboraram com minha educação, independente da matéria em sala de aula. Cito dois professores que estiveram comigo nos últimos anos da faculdade, meu orientador Professor Doutor Wladimir Seixas pelos seus conhecimentos e auxílios que foram fundamentais para minha formação, e pelo Professor Doutor Paulo Cesar Oliveira pelos seus conhecimentos e atenção sempre que necessário. Além disso, gostaria de agradecer à Rafaela Arakaki Secretária do curso de Licenciatura em Matemática, pois seu auxílio foi significativo para esta conclusão.

A todos os familiares, amigos da UEL, amigos da UFSCar e da vida que me acompanharam nessa jornada.

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A Teoria dos Jogos é o estudo sobre as tomadas de decisões estratégicas e lógicas das interações humanas, ou seja, decisões racionais que irão melhorar os resultados através das escolhas do indivíduo em seu cotidiano nos mais variados setores, onde o resultado da ação de indivíduos, grupo de indivíduos, ou instituições, depende substancialmente das ações dos outros envolvidos. Em outras palavras, trata de situações onde nenhum indivíduo pode convenientemente tomar decisão sem levar em conta as possíveis decisões dos outros em um jogo.

Comecei a me interessar por esse assunto através de um primo Daniel formado em economia, ambos somos competitivos e gostamos de estudar as chances de vitórias nos mais variados jogos, assim que ele me trouxe essa matéria para estudar comecei a buscar mais artigos e livros.

Mas o que são jogos? A teoria dos jogos pode ser definida como a teoria dos modelos matemáticos que estuda a escolha de decisões mais benéficas onde existem condições de conflito, sejam eles através de jogos, de guerras, da economia ou outra situação que exista a interação.

A Teoria dos Jogos foi criada para se estudar temas como eleições, leilões, balança de poder, evolução genética, etc. É também uma teoria da matemática pura, que pode e tem sido estudada como tal, sem a necessidade de relacioná-la com problemas comportamentais ou jogos. Grandes nomes como Antonio Augustin Coumo, Nicolas Bernoulli, Ernst Zermelo, Merrill M. Flood e John Nash trabalharam no assunto.

Durante esse trabalho apresentaremos os elementos que formam um jogo, o que são jogos de estratégia, destacaremos as estratégias puras, as estratégias mistas e algumas soluções para ambas, por fim traremos o Teorema do Minimax.

Este trabalho tanto pode ser utilizado para algum colega que busque conhecer os conceitos básicos de Teoria dos jogos quanto para outros que desejam um material inicial para se aprofundarem no assunto posteriormente.

2. ELEMENTOS DE UM JOGO

Uma situação para ser considerada como jogo deve apresentar a existência de conflito e interdependência entre as decisões dos participantes. Definimos como conflito quando existe a disputa entre dois ou mais indivíduos. A interdependência é relacionada com as decisões isoladas de cada individuo. Em síntese, podemos identificar dois tipos de jogo:

1. O jogo não-cooperativo, quando as condições orgânicas do mesmo não permitem a formação de coalizões que possam determinar o resultado do jogo, e
2. O jogo cooperativo, quando as próprias condições orgânicas do jogo permitem a possibilidade dos participantes atuarem por meio de coalizões.

Vamos definir alguns elementos básicos para a análise dos jogos:

1. Interações: são as ações de cada agente que, consideradas individualmente, afetam os demais. Essas ações podem ser simultâneas ou alternadas.
2. Agente: é qualquer indivíduo, ou grupo de indivíduos envolvidos no processo de interação com capacidade para tomar decisão. Na Teoria dos Jogos, um agente é denominado jogador. Supomos que os agentes são racionais, isto é, os jogadores fazem as interações levando em conta os melhores resultados para si.
3. Incertezas. O fato do jogador escolher uma ação, não quer dizer que a resposta para esta ação seja o que ele espera, deve-se levar em consideração as consequências de cada ação.
4. Estratégia: é uma escolha que o jogador pode fazer em um dado momento do jogo. Cada jogador tem um conjunto de estratégias. Temos dois tipos de estratégia: determinística ou probabilística. Quando a estratégia é escolhida de forma determinística (isto é, a escolha do jogador é baseada em uma dedução racional) ela é chamada de estratégia pura. Quando um jogador escolhe de forma probabilística (ou seja, a escolha acontece após o jogador calcular suas chances de ganho e perda), uma estratégia de seu conjunto de estratégias puras, diz-se que ele escolheu uma estratégia mista.
5. Payoff: é o ganho que o jogador recebe após a estratégia escolhida. É dada por um número real atribuído através de uma função utilidade do jogo, em outras palavras, essa função utilidade é o resultado da escolha do jogador.

3. JOGOS DE ESTRATÉGIA

Jogos de estratégia pura são aqueles nos quais os jogadores baseiam suas estratégias em decisões determinísticas.

Um jogo em estratégias puras consiste de:

1. Um conjunto finito $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de jogadores, onde $a_i \in A$ representa o i-ésimo jogador.
2. Para cada jogador $a_i \in A$ temos um conjunto finito e não vazio $S_i = \{si_1, si_2, \ldots, si_{mi}\}$ de estratégias puras.
3. Um vetor **s** = $(s1_{J1}, s2_{J2}, \ldots, sn_{Jn})$ denominado um perfil de estratégia pura, onde si_{Ji} é a ji-ésima estratégia pura do jogador a_i ($mi \geq 2$).
4. Um espaço de estratégia pura do jogo $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$, isto é, um conjunto de todos os perfis de estratégia pura.
5. Para cada jogador $a_i \in A$ uma função utilidade $\begin{matrix} u_i : S \to R \\ s \to ui(s) \end{matrix}$ que associa o *payoff* do jogador a_i a cada perfil de estratégia pura $s \in S$.

(OLIVEIRA, A. A. S., p. 7)

A seguir, apresentaremos alguns exemplos simples de jogos em estratégias puras.

3.1. Exemplos

3.1.1. Dilema do Prisioneiro

Provavelmente o problema mais conhecido na Teoria dos Jogos, o dilema do Prisioneiro foi formulado por Albert W. Tucker em 1950. O dilema do prisioneiro é um jogo não cooperativo, mas poderia ser modelado como cooperativo se fosse permitido que os dois criminosos não somente se comunicassem como também fizessem compromissos obrigatórios. As decisões são simultâneas e um não sabe nada sobre a decisão do outro.

Dois ladrões são capturados e acusados de um mesmo crime. São presos em selas separadas e não podem se comunicar entre si. O delegado de plantão faz a seguinte proposta para cada um: escolher entre confessar e negar o crime. Se nenhum deles confessar, ambos serão submetidos a um ano de prisão cada por falta de provas. Se os dois confessarem, então ambos terão penas de 5 anos. Mas se um confessar e o outro negar o crime, então o que confessou será libertado e o outro será condenado a 10 anos de prisão.

O dilema do prisioneiro mostra que, em cada decisão, o prisioneiro pode satisfazer o seu próprio interesse, não confessar, ou atender ao interesse do grupo, confessar.

Para este jogo temos:

- O conjunto A de jogadores: $A = \{a_1, a_2\}$.
- O conjunto Sa_1 de estratégias puras do Prisioneiro 1: $Sa_1 = \{$confessar, negar$\}$.
- O conjunto Sa_2 de estratégias puras do Prisioneiro 2: $Sa_2 = \{$confessar, negar$\}$.
- O espaço S de estratégias puras do jogo:

  S = {(confessar, confessar), (confessar, negar), (negar, confessar), (negar, negar)}.

Temos portanto duas funções utilidades:

- $ua_1 : S \to \mathbb{R}$, função utilidade do Prisioneiro 1.
- $ua_2 : S \to \mathbb{R}$, função utilidade do Prisioneiro 2.

Logo os *payoffs* do Prisioneiro 1 são:

- ua_1(confessar, confessar) $= -5$.
- ua_1(confessar, negar) $= 0$.
- ua_1(negar, confessar) $= -10$.
- ua_1(negar, negar) $= -1$.

Para o Prisioneiro 2 temos:

- ua_2(confessar, confessar) $= -5$
- ua_2(confessar, negar) $= -10$
- ua_2(negar, confessar) $= 0$
- ua_2(negar, negar) $= -1$

Os *payoffs* são representados na Tabela 1, sendo esta chamada de matriz de *payoffs* onde em cada elemento dessa matriz teremos os *payoffs* dos Prisioneiros 1 e 2 respectivamente. Os sinais negativos nos *payoffs* são para enfatizar o tempo que cada prisioneiro ficar na prisão.

Tabela 1: O Dilema do Prisioneiro.

		Prisioneiro 2	
		Confessar	Negar
Prisioneiro 1	Confessar	(-5,-5)	(0,-10)
	Negar	(-10,0)	(-1,-1)

Fonte: Elaborado pelo autor.

3.1.2. A Tragédia dos Comuns

O termo *Tragedy of the Commons* (*commons* no sentido de "público") foi criado pelo ecologista e teórico dos jogos Garrett Hardin numa publicação em 1968. Hardin ilustra o problema usando a parábola de um grupo de pastores que tinham seus animais numa terra pública. A saber:

> *Considere uma vila, onde cada um dos n fazendeiros tem a opção de manter ou não sua ovelha no pasto. O ganho do leite e da lã de uma ovelha pastando é igual a 1, por outro lado, esta ovelha pastando contribui com um dano ambiental de 2 unidades por cada fazendeiro.*
>
> (SARTINI, B. A., 2004, p. 18)

Assim, cada fazendeiro tem duas estratégias: manter ou retirar a sua ovelha do pasto, ou seja,

$x_i = 0$, se o i-ésimo fazendeiro mantêm sua ovelha ou

$x_i = 1$, se o i-ésimo fazendeiro retirará sua ovelha

Para este jogo temos:

- $n = 2$
- O conjunto F de fazendeiros (jogadores): $F = \{f_1, f_2\}$.
- O conjunto Sf_1 de estratégias puras do Fazendeiro 1: Sf_1 = {manter, retirar}.
- O conjunto Sf_2 de estratégias puras do Fazendeiro 2: Sf_2 = {manter, retirar}.
- O espaço S de estratégias puras do jogo:

  S = {(manter, manter), (retirar, manter), (manter, retirar), (retirar, retirar)}.

Temos portanto duas funções utilidades:

- $uf_1 : S \to \mathbb{R}$, função utilidade do Fazendeiro 1,
- $uf_2 : S \to \mathbb{R}$, função utilidade do Fazendeiro 2.

A função utilidade é dada por:

- $u_1(x_1, x_2) = x_1 – 2$.
- $u_2(x_1, x_2) = x_2 – 2$.

Logo, os *payoffs* do Fazendeiro 1 são:

- uf_1(manter, manter) = - 1.
- uf_1(manter, retirar) = 0.
- uf_1(retirar, manter) = - 2.

- uf_1(retirar, retirar) = 0.

E para o Fazendeiro 2 temos:

- uf_2(manter, manter) = - 1.
- uf_2(manter, retirar) = - 2.
- uf_2(retirar, manter) = 0.
- uf_2(retirar, retirar) = 0.

Na tabela 2 é apresentada a matriz de *payoffs*.

Tabela 2: Tragédia dos comuns.

		Fazendeiro 2	
		Manter	Retirar
Fazendeiro 1	Manter	(-1,-1)	(0,-2)
	Retirar	(-2,0)	(0,0)

Fonte: Elaborado pelo autor.

3.1.3. A Batalha dos Sexos

Um casal pretende sair junto para passear, o homem pretende assistir um jogo de futebol e a mulher prefere ir ao cinema. Ambos dão preferência por passarem a noite juntos. Se eles forem ao futebol juntos, então o homem tem satisfação maior que a da mulher, caso ambos forem juntos ao cinema a mulher terá a satisfação maior. Finalmente, se optarem sair sozinhos ambos ficarão insatisfeitos.

(SARTINI, B. A., 2004, p. 18)

A matriz de payoff para este jogo é a Tabela 3:

Tabela 3: A Batalha dos Sexos.

		Homem	
		Futebol	Cinema
Mulher	Futebol	(5,10)	(0,0)
	Cinema	(0,0)	(10,5)

Fonte: Elaborado pelo autor.

3.2 Soluções de um Jogo de Estratégias Puras

Uma solução de um jogo é uma previsão sobre o resultado do jogo, onde cada jogador procura escolher a melhor estratégia disponível. Existem vários conceitos diferentes de soluções de um jogo. Nesta seção abordaremos a estratégia dominante e o equilíbrio de Nash para estratégias puras.

Ao escolher uma ação um jogador deve ter na mente as ações que os outros jogadores escolherão. Por exemplo, o jogador "A" não analisa somente a melhor estratégia que deve escolher, mas também as prováveis estratégias do seu oponente, o jogador "B". A partir desse pensamento entramos em uma cadeia de suposições, onde "B" também não analisa apenas o seu melhor *payoff*, mas também qual a estratégia que será escolhida por "A". Dessa forma, o jogador "B" pode optar por uma estratégia alternativa para surpreender o seu adversário. Da mesma forma o jogador "A" pode ter essa atitude.

Exemplo 3.2: *Considerando o dilema do prisioneiro, como podemos encontrar uma solução plausível para minimizar o tempo de cadeia do Prisioneiro 1 e do Prisioneiro 2?*

Se analisarmos o jogo do ponto de vista do Prisioneiro 1, ele pode raciocinar da seguinte maneira:

> *"Duas coisas podem acontecer: o Prisioneiro 2 pode confessar ou Prisioneiro 2 pode negar.*
> *Se o Prisioneiro 2 confessar, logo minha melhor opção é confessar também.*
> *Se o Prisioneiro 2 não confessar, então eu fico livre se eu confessar.*
> *Em qualquer um dos casos, a melhor opção será eu confessar. Então, confessarei."*

Se analisarmos agora o jogo do ponto de vista do Prisioneiro 2, podemos aplicar a mesma linha de raciocínio e concluir que o Prisioneiro 2 também confessará. Assim, ambos confessarão e ficarão presos por 5 anos.

Analisando a questão acima, podemos dizer que os dois jogadores possuem uma estratégia dominante, ou seja, todas menos uma estratégia é estritamente dominada, conceitos que serão definidos agora.

3.2.1 Dominância

Denotemos por s_{-i} (com i = 1, 2, …, n) as estratégias puras dos outros jogadores, menos o jogador a_i, isto é $s_{-i} = (s_{1J1}, s_{2J2}, \ldots, s_{i-1ji-1}, s_{i+1ji+1}, \ldots, s_{njn}) \in S_{-i}$, onde $S_{-i} = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \ldots \times S_n$. Dessa forma, um perfil de estratégias também pode ser escrito como

$$(s_{ij}, s_{-i}) = (s_{1J1}, s_{2J2}, \ldots, s_{i-1ji-1}, s_{ij}, s_{i+1ji+1}, \ldots, s_{njn})$$

para ressaltar o ponto de vista do jogador i em relação aos n − 1 outros jogadores.

Definição 3.1: (Estratégia Pura Estritamente Dominada) *Uma estratégia pura $s_{ij} \in S_i$ do jogador $a_i \in A$ é estritamente dominada pela estratégia $s_{ij\_} \in S_i$ se, $u_i(s_{ij\_}, s_{-i}) > u_i(s_{ij}, s_{-i})$, para todo $s_{-i} \in S_{-i}$. A estratégia $s_{ij} \in S_i$ é fracamente dominada pela estratégia $s_{ij\_} \in S_i$ se $u_i(s_{ij\_}, s_{-i}) \geq u_i(s_{ij}, s_{-i})$, para todo $s_{-i} \in S_{-i}$.*

Dominância estrita iterada nada mais é do que um processo onde se eliminam as estratégias que são estritamente dominadas.

Exemplo 3.3: Considere o jogo determinado pela Tabela 4 abaixo, onde temos a seguinte matriz de *payoffs*.

Tabela 4: Matriz de *Payoff* de um jogo I

		a_2			
		s_{21}	s_{22}	s_{23}	s_{24}
a_1	s_{11}	(5,2)	(2,6)	(1,4)	(0,4)
	s_{12}	(0,0)	(3,2)	(2,1)	(1,1)
	s_{13}	(7,0)	(2,2)	(1,1)	(5,1)
	s_{14}	(9,5)	(1,3)	(0,2)	(4,8)

Fonte: (SARTINI B. A, 2004, p. 9)

Nesta matriz de *payoff*, concluímos que para o jogador a_2, a estratégia s_{21} é estritamente dominada pela estratégia s_{24}, podemos assim eliminar a primeira coluna e teremos a tabela 5.

Tabela 5: Matriz de *Payoff* estritamente dominada de um jogo I

		a_2		
		s_{22}	s_{23}	s_{24}
a_1	s_{11}	(2,6)	(1,4)	(0,4)
	s_{12}	(3,2)	(2,1)	(1,1)
	s_{13}	(2,2)	(1,1)	(5,1)
	s_{14}	(1,3)	(0,2)	(4,8)

Fonte: (SARTINI B. A, 2004, p. 10)

Agora para o jogador a_1, as estratégias s_{11} e s_{14} são estritamente dominadas pelas estratégias s_{12} e s_{13}, respectivamente. Portanto, as linhas 1 e 4 podem ser eliminadas. Além disso, a estratégia s_{23} do jogador a_2 é estritamente dominada pela estratégia s_{22}. Assim, a coluna 2 também pode ser eliminada. Obtemos então uma matriz reduzida 2×2 na tabela 6.

Tabela 6: Matriz de *Payoff* estritamente dominada de um jogo I

		a_2	
		s_{22}	s_{24}
a_1	s_{12}	(3,2)	(1,1)
	s_{13}	(2,2)	(5,1)

Fonte: (SARTINI B. A, 2004, p. 10)

Finalmente, a estratégia s_{24} do jogador a_2 é estritamente dominada pela estratégia s_{22} e, na matriz 2×1 resultante, a estratégia s_{13} do jogador a_1 é estritamente dominada pela estratégia s_{12}. Vemos então que o resultado do jogo é (3, 2), isto é, o jogador a_1 escolhe a estratégia s_{12} e o jogador a_2 escolhe a estratégia s_{22}.

Exemplo 3.4: Considere a seguinte matriz de *payoffs*na tabela 7

Tabela 7: Matriz de *Payoff* de um jogo II

		Jogador 2	
		B	**C**
Jogador 1	**B**	(1,1)	(2,0)
	C	(0,2)	(2,2)

Fonte: (OLIVEIRA, A. A. S., p. 11)

Neste jogo, a estratégia C é fracamente dominada pela estratégia B para ambos os jogadores, pois:

- $u_{J1}(B,B) > u_{J1}(C,B)$
- $u_{J1}(B,C) = u_{J1}(C,C)$
- $u_{J2}(B,B) > u_{J2}(B,C)$
- $u_{J2}(C,B) = u_{j2}(C,C)$.

3.3. Equilíbrio de *Nash* em Estratégias Puras

Uma solução estratégica ou equilíbrio de Nash de um jogo é um ponto onde cada jogador não tem incentivo de mudar sua estratégia se os demais jogadores não o fizerem.

Definição 3.2: (Equilíbrio de Nash) *Dizemos que um perfil de estratégia* $s^* = (s^*_1, \ldots, s^*_{(i-1)}, s^*_i, s^*_{(i+1)}, \ldots, s^*_n) \in S$ *é um equilíbrio de Nash se* $u_i(s^*_i, s^*_{-i}) \geq u_i(s_{ij_i}, s^*_{-i})$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$ *e para todo* $j_i = 1, \ldots, m_i$*, com* $m_i \geq 2$.

No equilíbrio de Nash, os jogadores pensam da seguinte forma:

- J1: Estou fazendo o melhor que posso, dado o que você está fazendo.
- J2: Você está fazendo o melhor que pode, dado o que eu estou fazendo.

Exemplo 3.5: No Dilema do prisioneiro, temos apenas um equilíbrio de Nash, que é o perfil de estratégia pura (confessar, confessar).

Exemplo 3.6: Um outro jogo onde temos dois equilíbrios de Nash é a Batalha dos Sexos onde os perfis de estratégia pura (Futebol, Futebol) e (Show, Show) são os equilíbrios de Nash. Neste jogo, os interesses são conflitantes e os jogadores querem chegar a um consenso. Por isso, o equilíbrio de Nash se dá quando os dois escolhem o mesmo lugar para sair.

A definição de equilíbrio de Nash acima não afirma que um jogo possui apenas uma solução. Assim, podemos ter jogos com nenhum equilíbrio de Nash, apenas um, ou até mesmo vários jogos com equilíbrios de Nash.

Existem jogos que não possuem equilíbrios de Nash em estratégias puras. Podemos citar o jogo de combinar moedas, onde os jogadores escondem a moeda na mão e escolhem em apresentar ao mesmo tempo, se ambas moedas apresentarem a mesma face voltada para cima (cara/cara ou coroa/coroa), então o primeiro jogador ganha a moeda do segundo jogador, caso as faces das moedas sejam diferentes (cara/coroa ou coroa/cara) então o primeiro dá a sua moeda para o segundo jogador. Esse jogo se encontra representado por sua matriz de *payoffs* dada na Tabela 8 a seguir:

Tabela 8: Matriz de *Payoff* do jogo de moedas

		Jogador 2	
		Cara	**Coroa**
Jogador 1	**Cara**	(+1,-1)	(-1,+1)
	Coroa	(-1,+1)	(+1,-1)

Fonte: (SARTINI B. A, 2004, p. 12)

4. JOGOS EM ESTRATÉGIAS MISTAS

Existem jogos que não possuem equilíbrio de Nash em estratégias puras, como o exemplo do jogo de moedas citado acima, dessa forma devemos considerar o jogo do ponto de vista probabilístico, ou seja, designar uma distribuição de probabilidades para cada conjunto de estratégias puras.

Uma estratégia mista para um jogador g_i será uma função $\varphi_i : S_i \rightarrow [0,1]$ que relaciona a estratégia pura $s_{iji} \in S_i$, com uma probabilidade $\varphi_i(s_{iji}) \geq 0$, onde S_i é um conjunto de estratégias puras. Como $\varphi_i(s_{iji})$ são medidas de probabilidades, devemos ter:

$$\sum_{k=1}^{mi} \varphi_i(s_{ik}) = 1$$

Denotaremos $\varphi_i(s_{iji})$ por p_{ik}, onde $k = 1, ..., m_i$.

Uma estratégia mista $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, ..., p_{imi})$ é uma distribuição de probabilidade sobre cada conjunto de estratégias puras do jogador g_i. Denotaremos por Δm_i o conjunto de estratégia mista do jogador g_i, onde $\Delta m_i = \{(x_1, ..., x_{mi}) \in \mathbb{R}^{mi}; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_{mi} \geq 0\}$ e

$$\sum_{k=1}^{mi} p_{ik} = 1.$$

O espaço de todos os perfis de estratégia mista é o produto cartesiano

$$\Delta = \Delta_{m1} \text{ x } \Delta_{m2} \text{ x ... x } \Delta_{mn},$$

denominado espaço de estratégia mista. Um vetor p ϵ Δ é denominado um perfil de estratégia mista. O *payoff* esperado será a média ponderada dos *payoffs* obtidos através das distribuições das estratégias puras, ou seja:

$$U_i(p) = \sum_{j1=1}^{m1} \sum_{j2=1}^{m2} \ldots \sum_{jn=1}^{mn} \left(\prod_{k=1}^{n} p_{kjk} . u_i(s1j1, s2j2, \ldots, snjn) \right)$$

Consideremos por exemplo o jogo das moedas. Se o jogador g_1 escolhe a distribuição de probabilidade p1=(1/4,1/3) e o jogador g_2 escolhe a distribuição p2=(1/3,2/3), então os *payoffs* esperados associados ao perfil de estratégia mista p = (p1, p2) = (1/4,3/4;1/3,2/3) são dados por:

$$U_1(p) = \sum_{j1=1}^{2} \sum_{j2=1}^{2} \left(\prod_{k=1}^{2} p_{kjk} u_1(s_{1j1,} s_{2j2}) \right)$$

isto é,

U_1(p) = p11 (p21u1(s11,s21) + p22u1(s11,s22)) + p12 (p21u1(s12,s21) + p22u1(s12,s22))

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}(+1)+\frac{2}{3}(-1)\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}(-1)+\frac{2}{3}(+1)\right)=\frac{+1}{6}$$

Analogamente, o *payoff* do jogador g2

$$U_2(p) = \sum_{j1=1}^{2} \sum_{j2=1}^{2} \left(\prod_{k=1}^{2} p_{kjk} u2(s1j1, s2j2) \right)$$

e assim,

U_2(p) = p11 (p21u2(s11,s21) + p22u2(s11,s22)) + p12 (p21u2(s12,s21) + p22u2(s12,s22))

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}(-1)+\frac{2}{3}(+1)\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}(+1)+\frac{2}{3}(-1)\right)=\frac{-1}{6}$$

4.1. Soluções em Estratégias Mistas

Nas soluções de jogos em estratégias mistas utilizaremos os conceitos básicos definidos pelas soluções em estratégias puras.

4.1.1. Dominância Estrita Iterada

Suponha que para cada jogador a_i em um jogo de estratégia mista e cada t = 1, . . . , T existe um conjunto X_{ti} de estratégias mistas para o jogador a_i (o conjunto de estratégias mistas restantes no início da etapa t de eliminação) tal que:

- X_1
  i = _mi (começamos com o conjunto de todas as estratégias mistas possíveis).
- X_{t+1}
  i ⊂ X_t
  i para cada t = 1, . . . , T −1 (a cada estágio podemos eliminar estratégias).
- para cada t = 1, . . . , T − 1, cada estratégia mista p_i do jogador a_i tal que $p_i \in X_{ti}$ e $p_i \notin X_{(t+1)i}$ é estritamente dominada no jogo em que o conjunto de estratégias mistas de cada jogador a_j é X_{tj} (eliminamos somente as estratégias estritamente dominadas).
- nenhuma estratégia em X_{Ti} é estritamente dominada no jogo no qual o conjunto de estratégias de cada jogador a_j é X_{Tj} (no final do processo nenhuma estratégia de qualquer jogador é estritamente dominada).

Então obtemos um conjunto de estratégias mistas que sobreviveram a técnica de dominância estrita iterada, chamamos estas estratégias mistas de estritamente dominantes.

Assim como em estratégias puras, representaremos por p_{-i} as estratégias mistas dos outros jogadores, menos o jogador a_i.

4.1.2 Equilíbrio de *Nash* em Estratégias Mistas

Definição 4.1. *Dizemos que um perfil de estratégia mista $p^* = (p^*_1, p^*_2, p^*_3, ..., p^*_n)$, com $p^* \epsilon \Delta$, (onde $\Delta = \Delta_{m1} \times \Delta_{m2} \times ... \times \Delta_{mn}$), é um equilíbrio de Nash se, $u_i(p*_i , p*_{-i}) \geq u_i(p, p*_{-i})$ para todo $p \epsilon \Delta_{mi}$, ou seja, nenhum jogador sente motivação de trocar sua estratégia mista se os demais jogadores não o fizerem.*

Para exemplificar um equilíbrio de Nash em estratégias mistas, podemos citar o dilema do prisioneiro, segue:

Exemplo 4.1: No dilema do prisioneiro, o perfil de estratégia mista $p{*} = (p{*}_1, p{*}_2) = (1, 0; 1, 0)$ é um equilíbrio de Nash, pois

$$u_1(p, p{*}_2) = u_1(p, 1-p; 1, 0) = 5p - 10 \leq -5 = u_1(1, 0; 1, 0) = u_1(p{*}_1, p_2)$$

para todo $p = (p, 1 - p) \in \Delta_2$

e

$$u_2(p{*}_1, q) = u_2(1, 0; q, 1 - q) = 5q - 10 \leq -5 = u_2(1, 0; 1, 0) = u_2(p{*}_1, p{*}_2)$$

para todo $q = (q, 1-q) \in \Delta_2$.

Observe que este equilíbrio corresponde ao equilíbrio em estratégias puras $s{*}$ = (confessar, confessar).

5. TEOREMA DO MINIMAX

Em 1944 o matemático húngaro John Von Neumman e o economista austríaco Oskar Morgenstern publicaram o livro clássico: Theory os Games and Economic Behavior, onde apresentaram o teorema do minimax como solução para jogos de soma zero com dois jogadores.

O Teorema minimax de Von Neumman nos diz que em jogos com dois jogadores onde seus ganhos são opostos, o mais racional para cada jogador é buscar a estratégia que maximize seu ganho mínimo, ou ainda, que minimize o ganho máximo do outro jogador. E sempre existirá um ponto onde os jogadores não tem interesse de mudar sua estratégia mista se os demais jogadores também não o fizerem.

Apresentaremos agora alguns conceitos novos para podermos entender este teorema.

5.1. Jogos de soma zero com dois jogadores

Definição 5.1. (Jogos de soma constante com dois jogadores) Um jogo de soma constante com dois jogadores é um jogo de dois jogadores onde denominamos jogador linha e jogador coluna, com estratégias

$$S_{\text{jogador linha}} = \{1, 2, ..., m\} \text{ e } S_{\text{jogador coluna}} = \{1, 2, ..., n\}$$

e matriz de *payoff* na tabela 9

Tabela 9: Matriz de Payoff de um jogo com soma zero

Jogador Coluna

		1	2	...	n
	1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})	...	(a_{1n}, b_{1n})
Jogador linha	2	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})	...	(a_{2n}, b_{2n})
	...	...	...	...	...
	m	(a_{m1}, b_{m1})	(a_{m2}, b_{m2})	...	(a_{mn}, b_{mn})

Fonte: (OLIVEIRA, A. A. S., p. 24)

(esta representação matricial representa que se o jogador linha A escolhe a estratégia i e o jogador coluna B escolhe a estratégia j, o payoff para A é a_{ij} e para B é b_{ij})

que satisfaça $a_{ij} + b_{ij} = c =$ constante, para todo i = 1, 2, ..., m e j = 1, 2, ..., n. No caso particular onde c = 0, dizemos que o jogo tem soma zero.

Jogos de soma zero com dois jogadores é aquele que, quando um jogador ganha, o outro necessariamente tem que perder, como exemplo, o jogo de poker ou o jogo de xadrez.

Para ilustrarmos o teorema do minimax de Von Neumman, vamos expor o jogo da divisão de bolos, onde ocorre a seguinte situação:

> *Você tem um pedaço de bolo para dividir para seus 2 filhos que sempre reclamam que as divisões dos pedaços de bolos são injustas, pois um filho sempre fica com o pedaço maior. O que você pode fazer a respeito?*

Uma solução para esse empasse é deixar que uma criança corte o bolo e a outra criança escolha o pedaço. Sabemos que ambos tem o incentivo de optar pelo pedaço maior, dessa forma, a criança que for cortar o bolo não pode reclamar que o bolo tenha sido mal divido pois é ela quem está repartindo o bolo e a outra criança também não pode reclamar da proporção pois é ela quem está escolhendo o pedaço. Assim, não pode haver critica pela divisão do bolo tanto da criança que corta C1, como da criança que escolhe C2.

Podemos olhar para esse problema como um jogo de soma zero para 2 jogadores, onde a solução seria dividir o bolo em duas partes iguais.

Analisando as estratégias de C1 temos: cortar de forma desproporcional ou cortar da maneira mais igual possível. A outra criança, C2 também tem duas estratégias possíveis: escolher o maior pedaço ou escolher o menor pedaço. Vamos considerar que cortar o bolo em duas partes iguais seja improvável de se acontecer, mesmo que a criança C1 opte por cortar o bolo simetricamente, sempre haverá uma migalha a mais em uma das partes. Segue abaixo a matriz de *payoff* para o jogo da divisão dos bolos na tabela 10:

Tabela 10: Jogo de Divisão de Bolos

		Estratégia da C2	
		Escolher o maior pedaço	Escolher o menor pedaço
Estratégia da C1	Cortar o bolo de forma mais igual possível	Metade do bolo menos uma migalha	Metade do bolo mais uma migalha
	Cortar o bolo em dois pedaço diferentes	Menor pedaço	Pedaço maior

Fonte: (OLIVEIRA, A. A. S., p. 25)

A solução para este jogo é a criança C1 que está cortando o bolo, tentar cortá-lo da forma mais igual possível e a criança C2 irá escolher o pedaço maior, assim a criança "cortadora" irá ficar com o pedaço um pouco menor que a metade do bolo. Como C1 decide o resultado do jogo, ela age de forma a maximizar o menor pedaço de bolo que será deixado por C2, esta por sua vez irá minimizar o pedaço de C1. Observando a tabela 10 da divisão do bolo concluímos que a criança que escolhe procura o mínimo da coluna do máximo, chamamos esse ponto de minimax, neste caso seria o ponto (a_{11},b_{11}).

Tomemos como exemplo a competição de duas empresas de televisão, SBT e GLOBO. Elas estão planejando lançar um programa de 1h de duração ambas no mesmo horário; o SBT pode escolher entre os programas A e B e a GLOBO entre C e D, considere que nenhuma delas sabe qual o programa que a outra lançará. Assim elas contratam o mesmo instituto de pesquisa de opinião para lhes dar uma estimativa de como serão as possíveis divisões de audiência. A tabela 11 abaixo trata do *payoff* em relação a emissora SBT.

Tabela 11: SBT X GLOBO

		Programa da Rede Globo	
		C	D
Programa da Rede SBT	A	35	50
	B	40	65

Fonte: (COSTA C. S., p. 4)

Na tabela acima, por convenção são os *payoffs* da Rede SBT. Como estamos em um jogo de soma zero entendemos que os ganhos da Rede GLOBO é o oposto dos ganhos da Rede SBT, ou seja, quando a Rede SBT (jogador linha) tem 35% de ganho a Rede GLOBO terá 65% de ganho, que é a diferença da porcentagem da audiência.

Para encontrarmos a melhor estratégia para a solução deste jogo, ou a chamada estratégia ótima de cada rede a fim de maximizar a sua audiência. Dessa forma, os jogadores tomarão decisões que podemos classificar como jogadas de anti-risco, as quais optam por um ganho menor e evitam prejuízos desnecessários.

Como a rede SBT deseja maximizar sua audiência mínima esperada, iremos assinalar a porcentagem mínima de cada linha e em seguida destacamos o máximo desses valores assinalados. De modo semelhante deduzimos como a rede GLOBO pretende minimizar a audiência máxima esperada, encontrando o máximo entre as colunas e escolhendo o seu mínimo, Conforme o esquema da tabela 12 abaixo:

Tabela 12: Solução Mínimax para as emissoras

	C	D	Mínimo da linha
A	35	50	35
B	40	65	40
Máximo da coluna	40	65	

Max-mini = 40

Mini-max = 40

Fonte: (COSTA C. S., p. 4)

Esta combinação onde o máximo dos mínimos da coluna e o mínimo dos máximos das linhas são iguais, chamamos de ponto mini-max do jogo ou ponto de sela. Com isso os jogadores garantem para si um *payoff* mínimo mesmo que o adversário mude sua estratégia.

Definição 5.2. (Ponto de sela) *Dizemos que um elemento a_{ij} (com i,j = 1, 2 …, n) de uma matriz de payoff A é um ponto de sela se este elemento for simultaneamente um mínimo em sua linha e um máximo em sua coluna, isto é, se*

$$a_{ij} \leq a_{il} \text{ para todo } l = 1, ..., n \text{ e}$$

$$a_{ij} \geq a_{kj} \text{ para todo } k = 1, ..., m.$$

Algo que faz com que a Teoria dos jogos seja uma “teoria”, mais do que uma relação de regras, é a noção de um ponto de sela que é um conjunto de estratégias ótimas para todos os jogadores do jogo.

Suponhamos que o *payoff* mínimo do jogador linha, se ele escolher a linha k, seja dado por

$$a_k = \min_{1 \le l \le n} a_{kl}$$

Por analogia, o *payoff* mínimo do jogador coluna, se ele escolher a coluna l, como c – a_l, onde

$$a_l = \max_{1 \le k \le m} a_{kl}$$

Agora definimos

$$u_l(A) = \max_{1 \le k \le m} a_k = \max_{1 \le k \le m} \min_{a \le l \le n} a_{kl}$$

e

$$u_c(A) = \min_{1 \le l \le n} a_l = \min_{1 \le l \le n} \max_{1 \le k \le m} a_{kl}$$

Definição 5.3. (Estratégia mista maximin) *A estratégia maximin do jogador A em um jogo de estratégias mistas, é a estratégia mista que satisfaz*

$$\min_{1 \le l \le n} \max_{1 \le k \le m} a_{kl}$$

E a estratégia mista minimax do jogador a_i é

$$\max_{1 \le k \le m} \min_{1 \le l \le n} a_{kl}$$

Dessa forma, concluímos que o maximin é a estratégia mista que confirma a maximização do ganho mínimo do primeiro jogador. E entendemos que o minimax é a melhor escolha do segundo jogador, onde ele busca minimizar o *payoff* do seu adversário. Assim, o primeiro jogador busca maximizar o seu *payoff* mínimo, enquanto que o segundo jogador busca minimizar o *payoff* máximo do primeiro jogador.

5.2. Teorema Minimax de Von Neumann

Enunciaremos agora o Teorema Minimax de von Neumann, mas este não será demonstrado nesta monografia, pois exige uma teoria que está além do nosso objetivo aqui.

Teorema 5.1 *Para todo jogo de soma zero com dois jogadores, sempre existe um perfil de estratégia mista* (a_{ij}, b_{ij})*, onde* $a_{ij} = -b_{ij}$ *tal que*

$$max_{1\leq k\leq m}\, min_{1\leq l\leq n}\; a_{kl} = min_{1\leq l\leq n}\; max_{1\leq k\leq m}\; a_{kl}.$$

e (a_{ij}, b_{ij}) *é um equilíbrio de Nash para este jogo.*

Ou seja, para jogos de dois jogadores com soma zero sempre existe pelo menos um equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

Exemplo 5.1. Duas empresas concorrentes A e B que comercializam o mesmo produto e durante essa produção mensal é gerado um custo fixo de R$5.000,00 por período, que independente da quantidade deste produto vendido. Nesse quadro de disputa, ambas competem pelo mesmo mercado e têm a opção de praticarem um preço alto de R$2,00 ou um preço baixo de R$1,00, assim as regras são:

A R$2,00 o mercado consome 5.000 unidades a um custo de R$10.000,00;

A R$1,00 o mercado consome 10.000 unidades a um custo de R$10.000,00;

- Se ambas as empresas praticarem o mesmo preço, as vendas serão divididas igualmente entre elas;
- Se elas praticarem preços diferentes, aquela que optar pelo preço mais baixo venderá toda a quantidade de produtos e a outra não venderá nada.

Assim, a matriz de *payoffs* são os ganhos ou perdas das empresas e é dada pela tabela 13 abaixo;

Tabela 13: Matriz de *Payoff* do jogo do preço de vendas

		Empresa B	
		Preço alto	Preço baixo
Empresa A	Preço alto	(0,0)	(-5.000 , 5.000)
	Preço baixo	(5.000 , -5.000)	(0,0)

Fonte: (OLIVEIRA, A. A. S., p. 28)

Podemos concluir que o raciocínio para a empresa A seja: o *payoff* mínimo para o preço baixo R$1,00 é zero e para o preço alto R$2,00 é –R$5.000, com isso o preço R$1,00 maximiza o seu *payoff* mínimo. Deduzindo de forma semelhante para a empresa B concluímos que ela optará pelo preço R$1,00. Dessa forma a solução para este jogo será que ambas escolherão o valor baixo de R$1,00, caracterizando um equilíbrio de Nash.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa e o desenvolvimento da matéria Teoria dos Jogos nos auxiliam a entender as relações humanas, tendo em vista que ela é trabalhada intuitivamente desde sempre em guerras, negociações, política, entretenimento e outros assuntos diversos. Com o avanço da matemática, a Teoria dos jogos vem sendo generalizada para que possa ser modelada na maioria das interações alternadas e independentes.

O equilíbrio de Nash mostra que pode existir uma ou mais soluções onde nenhum jogador sente motivação para trocar sua estratégia se os demais jogadores não o fizerem, seja em estratégias puras ou mistas, isso nos diz que para infinitas interações chegaremos a uma solução estável.

Além disso, pudemos analisar o Teorema Minimax como uma solução ótima, ou seja, a solução mais racional para dois jogadores em um jogo com soma zero.

Este trabalho tanto pode ser utilizado para algum colega que busque conhecer os conceitos básicos de Teoria dos jogos quanto para outros que desejam um material inicial para se aprofundarem no assunto posteriormente.

7. REFERÊNCIAS

SOBRINHO, C. A. S. **Estratégias Discretas em Teoria dos Jogos**. 51f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013. Disponível em: https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tde/2958 Acesso em: 01 mar 2017

COSTA, C. S., **Teoria dos Jogos e a Relação entre o "Teorema Minimax" de John Von Neumann e o "Equilíbrio De Nash" De John Nash.** 9f. Dissertação (Licenciatura em Matemática) - Universidade Católica de Brasília. Disponível em: https://repositorio.ucb.br/jspui/bitstream/10869/1549/1/Cristiene%20dos%20Santos%20Costa.pdf Acesso em: 01 mar 2017

TONELLI, P. A. **Um Minicurso em Teoria dos Jogos.** Disponível em: https://www.ime.usp.br/~tonelli/mae515/minislides1.pdf Acesso em: 01 mar 2017

I**ntrodução à Teoria de Jogos - O que é a Teoria de Jogos** - http://www1.eeg.uminho.pt/economia/caac/pagina%20pessoal/Disciplinas/Disciplinas%2004/jogos.pdf Acesso em: 01 mar 2017

ALMEIDA, A. N. **Teoria dos Jogos: As Origens e os Fundamentos da Teoria dos Jogos.** Dissertação. UNIMESP - Centro Universitário Metropolitano de São Paulo. Disponível em: http://www.gilmaths.mat.br/artigos/teoria%20dos%20jogos.pdf Acesso em: 01 mar 2017

Teoria dos Jogos. Modelagem e Simulação - Teoria dos Jogos - Disponível em: http://www.ufjf.br/epd042/files/2009/02/jogos.pdf Acesso em: 10 mar 2017

PAVÃO, A. R. **Teoria Microeconômica I/ Economia Teoria dos Jogos e Estratégia Competitiva** - Disponível em: https://pt.scribd.com/document/323899121/Teoria-Dos-Jogos Acesso em: 01 mar 2017

CHALUB, F. A. C. C. **Introdução à Teoria dos Jogos.** - Disponível em: http://w3.impa.br/~zubelli/BIOMATH2004/jogos2.pdf Acesso em: 01 mar 2017

SARTINI, B. A., et al. **Uma Introdução a Teoria dos Jogos.** - Disponível em: https://www.ime.usp.br/~rvicente/IntroTeoriaDosJogos.pdf Acesso em: 01 mar 2017

OLIVEIRA, A. A. S. **Introdução a Teoria dos Jogos.** 34f. Monografia (Especialização em Matemática Universitária) - Universidade Estadual Paulista Instituto de Geociências e Ciências Exatas.